EXERCICE 15 :

(E) : $y'' = 2y'$

1) on pose $\mathfrak{z} = y'$

L'équation devient : $\mathfrak{z}' = 2\mathfrak{z}$

Les solutions sont : $h(x) = ae^{2x}$; $a \in IR$

D'où les solutions de (E) sont les fonctions définies sur IR par :

$$f(x) = \frac{a}{2}e^{2x} + b \; ; (a,b) \in IR^2$$

2) $f(x) = \frac{a}{2}e^{2x} + b$

$f'(x) = ae^{2x}$

$$\begin{cases} f(0) = 2 \\ f'(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{2} + b = 2 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{2} \\ a = 1 \end{cases}$$

d'où : $f(x) = \frac{1}{2}(e^{2x} + 3)$

EXERCICE 16 :

(E) : $y'' = -3y' + 1$

1) on pose $\mathfrak{z} = y'$

L'équation devient : (E') : $\mathfrak{z}' = 3\mathfrak{z} + 1$

Les solutions de (E') sont :

$h(x) = ae^{-3x} + \frac{1}{3}$; $a \in IR$

D'où les solutions de (E) sont les fonctions définies sur IR par :

$$f(x) = -\frac{a}{3}e^{-3x} + \frac{1}{3}x + b \; ; (a,b) \in IR^2$$

2) $f(x) = -\frac{a}{3}e^{-3x} + \frac{1}{3}x + b$

$f'(x) = a\,e^{-3x} + \frac{1}{3}$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{a}{3} + b = 0 \\ a + \frac{1}{3} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{-1}{9} \\ a = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

d'où : $f(x) = \frac{1}{9}e^{-3x} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}$

EXERCICE 17 :

1) $y'' + 16y = 0$

les solutions sont les fonctions définies sur IR par :

$f(x) = A\sin(4x) + B\cos(4x)$;

$(A,B) \in IR^2$

2) $f(x) = \sin(4x) + \cos(4x)$

3) $f(t) = \cos(4t) + \sin(4t)$

$= \sqrt{2}.\cos(4t - \varphi)$

Avec $\begin{cases} \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ $\varphi = \frac{\pi}{4}(2\pi)$

D'où : $f(t) = \sqrt{2}.\cos(4t - \frac{\pi}{4})$

$(a = 4 \; ; \; b = \frac{\pi}{4})$

4)

$\bar{f} = \frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{8}} f(t)dt = \frac{8}{\pi}[\frac{\sqrt{2}}{4}.\sin(4t - \frac{\pi}{4})]_0^{\frac{\pi}{8}}$

$= \frac{8}{\pi}(\frac{1}{4} + \frac{1}{4})$; $\boxed{\bar{f} = \frac{4}{\pi}}$

EXERCICE 18 :

1) $y'' + y' = 0 \Leftrightarrow y'' = -y'$

on pose $\mathfrak{z} = y'$

L'équation devient : $\mathfrak{z}' = -\mathfrak{z}$

$\mathfrak{z} = a\,e^{-x}$; $a \in IR$

D'où : $y = -a\,e^{-x} + b$; $(a,b) \in IR^2$

les solutions sont les fonctions définies sur IR par :

$f(x) = -a\,e^{-x} + b$; $(a,b) \in IR^2$

2) les solutions de l'équation :

$y''' + y'' = 0$ sont les fonctions définies sur IR par :

$g(x) = a\,e^{-x} + b\,x + c$; $(a,b,c) \in IR^3$